§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны компоненты тензора инерции в точке O относительно осей координат $Oxyz$. Для определения направления главных осей инерции в точке O используем уравнение эллипсоида инерции относительно этих осей

$$\varphi(x,\ y,\ z)=J_x x^2+J_y y^2+J_z z^2-$$
$$-2J_{yz}yz-2J_{zx}zx-2J_{xy}xy-1=0. \qquad (27'')$$

Если оси координат $Ox'y'z'$ являются главными осями инерции, то радиус-вектор $\bar{r}$ точки M эллипсоида инерции, расположенной на главной оси инерции, например оси Oz' (рис. 34), направлен по нормали к эллипсоиду, т. е. параллельно вектору gradφ, который, согласно его определению, вычисляется по формуле

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}.$$

Параллельные векторы отличаются друг от друга скалярным множителем, который обозначим $2J$. Тогда для параллельных векторов $\bar{r}$ и gradφ и их проекций на оси координат имеем:

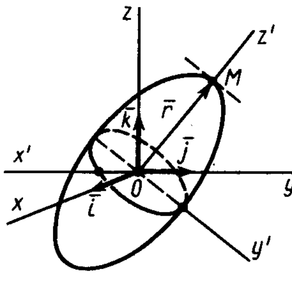

Рис. 34

$$2J\cdot\bar{r}=\operatorname{grad}\varphi; \qquad (28)$$
$$2J\cdot x=\partial\varphi/\partial x;\ \ 2J\cdot y=\partial\varphi/\partial y;$$
$$2J\cdot z=\partial\varphi/\partial z. \qquad (28')$$

В этих уравнениях x, y, z являются координатами точки конца вектора $\bar{r}$, проведенного из точки O вдоль какой-либо главной оси инерции для этой точки.

Для частных производных из (27″) получаем:

$$\partial\varphi/\partial x=2J_x\cdot x-2J_{xy}\cdot y-2J_{xz}\cdot z;$$
$$\partial\varphi/\partial y=-2J_{xy}\cdot x+2J_y\cdot y-2J_{yz}\cdot z;$$
$$\partial\varphi/\partial z=-2J_{zx}\cdot x-2J_{yz}\cdot y+2J_z\cdot z.$$

Подставляя их значения в (28′) и перенося все слагаемые в левую часть, после объединения и сокращения на общий множитель получим следующую систему уравнений для определения координат x, y, z точки M, находящейся на главной оси инерции:

$$\left.\begin{aligned}&(J_x-J)\cdot x-J_{xy}\cdot y-J_{xz}\cdot z=0;\\&-J_{yx}\cdot x+(J_y-J)\cdot y-J_{yz}\cdot z=0;\\&-J_{zx}\cdot x+J_{zy}\cdot y+(J_z-J)\cdot z=0.\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Так как (29) является однородной системой линейных уравнений, то отличные от нуля решения для координат x, y, z получаются только при условии, что определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}J_x-J & -J_{zy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_y-J & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z-J\end{vmatrix}=0. \qquad (30)$$

Это кубическое уравнение для определения J называется *уравнением собственных значений тензора инерции.*

В общем случае имеется три различных действительных корня кубического уравнения J_1, J_2, J_3, которые являются главными моментами инерции. Действительно, если ось Ox совпадает с главной осью инерции, то для точки M эллипсоида инерции, расположенной на этой оси, $y=0$ и $z=0$. Первое уравнение (29) принимает вид

$$(J_x-J)\cdot x=0.$$

Так как $x\neq0$, то $J_x-J=0$ и $J_x=J$, которое следует обозначить J_1. Аналогично можно получить $J_y=J=J_2$, $J_z=J=J_3$, если оси Oy и Oz—главные оси инерции.

Подставляя в (29) $J=J_1$, получим только два независимых уравнения для определения координат точки x, y, z эллипсоида инерции, соответствующих главной оси инерции, для которой главный момент инерции есть J_1. Третье уравнение системы будет следствием двух других уравнений, так как определитель этой системы равен нулю. Из (29) можно найти только две величины, например x/z и y/z. Они определят направление вектора $\bar{r}_1$ вдоль главной оси инерции, момент инерции относительно которой есть J_1. Модуль радиуса-вектора $\bar{r}_1$ остается неопределенным. Аналогично определяются направления векторов $\bar{r}_2$ и $\bar{r}_3$ вдоль двух других главных осей инерции, для которых главные моменты инерции равны J_2 и J_3. Можно доказать, что векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, направленные вдоль главных осей инерции, взаимно перпендикулярны.

Таким образом, если известен тензор инерции для осей $Oxyz$, то можно определить как направление главных осей инерции, так и главные моменты инерции. Для главных осей инерции тензор инерции (25) принимает форму

$$(J)=\begin{pmatrix}J_1 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0\\ 0 & 0 & J_3\end{pmatrix}. \qquad (25')$$